2 Білет

1. **Поняття рекусивної функції.**

Функцію, яку можна одержати з базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації, називають *частково рекурсивною функцією* (скорочено ЧРФ).

Всюди визначену ЧРФ називають *рекурсивною функцією*(скорочено РФ).

1. **Графік ПРФ є ПРМ.**

Графіком функції *F*(*x*1, … , *xn*) називається сукупність наборів з n+1 елементів виду <*x*1, … , *xn*, *F*(*x*1, … , *xn*)>.

Характеристична функція графіка функції f(x) визначає, чи належить x множині графіка функції, що рівносильно існуванню значення функції для аргументу х. Таким чином, х.ф. графіка функції f(x) рівносильна х.ф. значень функції f(x), а вона є ПР за умовою, отже, х.ф. графіка функції є ПР, тобто графік функції є ПР.

АБО

Задамо характеристичну функцію графіка функції f(x):

function χ*A* (*x, g*)

begin

if f(x) = g

then χ*A* = 0

else χ*A* = 1

end.

Вона є ПР, тому графік функції є ПРМ.

1. **Показати, що множина значень М функції f(x,y) = x + y є РПМ.**

Оскільки функція *f*(*x*, *y*) = *x* + *y* є ПР, то множина її значень за теоремою 5.3 теж є ПР, а отже, і РП за теоремою 6.1.

Теорема 5.3. Якщо ПР функція *f*(*x*) задовольняє умові *f*(*x*) ≥ *x* (*x* = 0, 1, 2, …), зокрема, якщо *f*(*x*) монотонно зростає, то множина *М* всіх значень цієї функції є ПР множиною.

Теорема 6.1. Кожна ПР множина є рекурсивно перелічимою.

Підмножина *А* множини натуральних чисел *N* називається *рекурсивною* (*примітивно рекурсивною*), якщо характеристична функція множини *А* рекурсивна (примітивно рекурсивна).

=====================================================================================

3 Білет

1. **Рекурсивно перелічимі множини. Рекурсивні та примітивно рекурсивні множини.**

Підмножина *А* множини натуральних чисел *N* називається *рекурсивною* (*примітивно рекурсивною*), якщо характеристична функція множини *А* рекурсивна (примітивно рекурсивна).

Так, як всі ПР функції рекурсивні, то кожна ПР множина є рекурсивною множиною.

Множина чисел *А* називається рекурсивно перелічимою (РПМ), якщо існує двомісна ПР функція *f*(*a*, *x*) така, що рівняння *f*(*a*, *x*) = 0 має розв’язок x тоді і тільки тоді, коли *a* ∈ *A*.

1. **Функція f(x) = 0, якщо x = 0 і f(x) = 1 + 2 + … + x, якщо x > 0 – ПРФ. Довести.**
2. **Показати, що кожна нескінченна РП множина М містить нескінченну рекурсивну підмножину**

=====================================================================================

4 Білет

1. **Теорема про мажоруючі неявні функції**

Хуй його знає шо це

1. **Функція, універсальна для одномісних ПРФ приймає кожне значення нескінченну кількість разів. Довести.**

Оскільки множина функцій, які є ПР – нескінченна, множина значень ПРФ – скінченна, тоді їх об’єднання – нескінченна множина. За другою властивістю універсальної функції: для кожної функції із існує таке число , що для всіх . Звідси маємо, що якщо множина f(y) утворюється у множині результатів, то множина різних значень скінченна. Оскільки ми повинні отримати нескінченну множину, тоді відповідно деякі значення повторюются нескінченну кількість разів

1. **Показати, що образ РП множини М відносно ЧРФ f(x) є РПМ.**

Дійсно, нехай - графік ЧР функції f(x) і множина М співпадає з множиною значенб функції α(x). Тоді часткова характеристична функція образу множини М відносно функції f(x) обчислюється наступним алгоритмом

Function χ(x)

begin

:= 0

:= 0

while :(i) != x do

:= + 1

while α(j) !=

χ := 0

*end*

=====================================================================================

5 Білет

1. **Теорема Поста.**

Якщо множина *А* і її доповнення *А*′ рекурсивно перелічимі, то *А* і *А*′ рекурсивні.

Доведення. Розглянемо алгоритм обчислення функції *h*(*n*):

function *h*(*n*)

begin

*i* = 0

while |*f*(*i*) – *n*|| *f*′(*i*) – *n*| ≠ 0

do *i* = *i* + 1

*h* = *i*

end.

Тоді характеристичні функції множин *А* і *А*′ обчислюються алгоритмами:

а) function χ*А* (*n*)

begin

if |*f* (*h*(*n*)) – *n*| = 0 then χ*А* = 0

else χ*А* = 1

end.

b) function χ*А*′ (*n*)

begin

if |*f*′(*h*(*n*)) – *n*| = 0 then χ*А*′ = 0

else χ*А*′ = 1

end,

де *f*, *f*′ – ПРФ з множинами значень *А* і *А*′ відповідно.

Таким чином, доповнення РП множини яка не є рекурсивною не може бути РП множиною.

1. **Нехай . Знайти область визначення функції h(z)**
2. **Показати що множина є РПМ, де f – ЧРФ.**

Дійсно, часткова характерестична функція множини М обчислюється наступним алгоритмом:

Function

begin

*i := 0*

while

*do i := i + 1*

*:= 0*

end

де -- графік ЧР функції .

=====================================================================================

12 Білет

1. **Нумерація n-ок натуральних чисел. Основні тотожності.**

Множина *А* *n*-oк натуральних чисел називається ПР, Р або РП, якщо такою є множина *с*(*А*) номерів всіх *n*-ок із *А*.

Теорема 7.1. Якщо функція *f*(*x*1, … , *xn*) рекурсивна (примітивно рекурсивна), то множина *М* розв’язків рівняння *f*(*x*1, … , *xn*) = 0 є рекурсивною (примітивно рекурсивною) множиною.

Доведення. Алгоритм для обчислення характеристичної функції множини *М* наступний:

function χ*М* (*x*1, … , *xn*)

begin

if *f*(*x*1, … , *xn*) = 0 then χ*М* := 0

else χ*M* := 1

end.

Теорема 7.2. Для того, щоб непуста сукупність *n*-ок була РП необхідно і достатньо, щоб вона була сукупністю всіх *n*-ок виду < *f*1(*x*), … , *fn*(*x*)>, *x* = 0, 1, … . де *f*1(*x*), … , *fn* (*x*) – деякі ПРФ.

Достатність (множина всіх *n*-ок виду <*f*1(*x*), … , *fn*(*x*)>, *x* = 0, 1, … , де *fi* – ПРФ є РПМ множиною). Часткова характеристична функція χ*М* множини *М* канторових номерів *n*-ок виду <*f*1(*x*), … , *fn*(*x*)>, *x* = 0, 1, … , може бути обчислена алгоритмом:

function χ*М* (*x*)

begin

*i* := 0

while ***с***(*f*1(*i*), … , *fn* (*i*)) ≠ *x*

do *i* := *i* + 1

χ*M* := 0

end.

Необхідність (множина *n*-ок *М* – РПМ ⇒ співпадає з множиною всіх *n*-ок виду < *f*1(*x*), … , *fn* (*x*)>, *x* = 0,1, … , де *fi* – ПРФ). Множина *А* канторових номерів *n*-ок з *М* співпадає з множиною значень функції

function *f*(*x*)

begin

if *F*(***l***(*x*), ***r***(*x*)) = 0 then *f* := ***l***(*x*)

else *f* := *b*

end,

де *F*(*a*, *x*) така, що рівняння *F*(*a*, *x*) = 0 має розв’язок ⇔ *a* ∈ *A*, а *b* ∈ *A*. Тому, множина *М* співпадає з множиною <***с****n*1(*f*(*x*)), … , ***c****nn*(*f*(*x*))>, *x* = 0, 1, ... .

Графіком функції *F*(*x*1, … , *xn*) називається сукупність (*n* + 1)-ок виду <*x*1, … , *xn*, *F*(*x*1, … , *xn*)>.

Теорема 7.3. Якщо графік *Gf*  всюди визначеної функції *f*(*x*1, … , *xn*) є РПМ, то функція *f* рекурсивна.

Доведення. Графік *Gf*  – це сукупність (*n* + 1)-ок виду: <*f*1(*t*), … , *fn* (*t*), *g*(*t*)>,

де *fi*, *g* – ПРФ. Тоді значення функції *f* в довільній точці можна обчислити за допомогою наступного алгоритму:

function *f*(*x*1, … , *xn*)

begin

*i* := 0

while *f*1(*i*) ≠ *x*1 ∨ … ∨ *fn*(*i*) ≠ *xn*

do *i* := *i* +1

*f* := *g*(*i*)

end,

отже, функція *f* – рекурсивна.

1. **Нехай множини A і B відрізняються скінченою кількість елементів. Довести, що якщо А РПМ, то В РПМ.**
2. **Нехай задані клінівські номери функції f(x) і g(x). Знайти клінівський номер їх суперпозиції.**

14 Білет

1. **Поняття примітивно рекурсивної функції.**

Функцію, яку можна одержати з базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції та примітивної рекурсії, називають *примітивно рекурсивною функцією* (скорочено ПРФ).

1. **Довести, що якщо предикати P(x) і Q(x) рекурсивні, то предикат p=P(x) --> Q(x) рекурсивний.**
2. **Довести, що існує число n таке, K(n,0) = n.**

=====================================================================================

16 Білет

1. **Теорема про існування нерекурсивних рекурсивно перелічимих множин.**

Теорема 11.1. Існує одномісна ЧРФ, яка приймає значення 0,1 і не має рекурсивних довизначень

Доведення. Розглянемо функцію

де *U*(*x*, *y*) – універсальна для всіх одномісних ЧРФ. Функція *V*(*x*) – ЧРФ. Покажемо, що вона не може мати рекурсивних довизначень.

Розглянемо функцію

Ця функція є довизначенням *V*(*x*). Покажемо, що не існує алгоритму, який її обчислює. Припустимо, що такий алгоритм існує, тобто функція *w*(*x*) – рекурсивна. Це означає, що

*w*(*x*) = *U*(*m*, *x*) для деякого *m*. Тобто, цю функцію можна обчислити в довільній точці алгоритмом А1:

A1: function *w*(*x*) function *U*(*n*, *x*)

begin begin

*w* := *U*(*m*, *x*) *i* := 0

end while *D*(*n*, *x*, *i*) ≠ 0 do

*i* := *i* + 1

*U* := ***l***(*i*)

end.

Обчислимо значення функції *w* в точці *m*. Якщо *w*(*m*) = 0, то *U*(*m*, *m*) = 0 (оскільки *w*(*m*) = *U*(*m*, *m*)). З іншого боку, якщо *w*(*m*) = 0, то *U*(*m*, *m*) > 0 (визначення функції *w*). Якщо *w*(*m*) = 1, то *U*(*m*, *m*) = 1 (оскільки *w*(*m*) = *U*(*m*, *m*)). З іншого боку, якщо *w*(*m*) = 1, то *U*(*m*, *m*) = 0 або *U*(*m*, *m*) не визначена (визначення функції *w*). В обох випадках одержали суперечність. Отже, алгоритм А1 функцію *w* не обчислює.

1. **Якщо графік всюди визначеної функції f(x) є РПМ, то f є РФ. Довести.**
2. **Нехай f, g – рекурсивні функції, причому g – бієкція. Крім того, нехай f(x) >= g(x) для всіх x, Тоді, якщо – РМ, то – РМ. Довести. (– область значень f(x)).**

=====================================================================================

21 Білет

1. Універсальна функція Кліні.

При вивченні властивостей ЧРФ іноді зручніше користуватися не універсальними функціями *T*(*x*0, *x*1, …, *xn*), а особливими функціями Кліні.

Введемо функції:

*K*2(*x*0, *x*1) = *T*2 (*l*(*x*0), *c*(*r*(*x*0), *x*1))

*K*3(*x*0, *x*1, *x*2) = *K*2 ([(*x*0, *x*1], *x*2)),

де [*x*0, *x*1] = *c*(*l*(*x*0), *c*(*r*(*x*0), *x*1)) – нумерація пар натуральних чисел

Лема. Функції *K*2(*x*0, *x*1) і *K*3(*x*0, *x*1, *x*2) зв’язані з універсальними функціями *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2) та *Т*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3) тотожностями:

1) *K*2(*c*(*x*0, *x*1), *x*2)= *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2).

2) *K*3(*c*(*x*0, *x*1), *x*2, *x*3) = *Т*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3).

Теорема 12.1. Функція Кліні *K*2(*x*0, *x*1) є ЧРФ, універсальною для всіх одномісних ЧРФ.

Доведення. Якщо *f*(*x*) – довільна ЧРФ, то для функції *g*(*y*, *x*) = *f*(*x*) + 0⋅*y* справедливе співвідношення *g*(*y*, *x*) = *T*3(*a*, *y*, *x*) = *K*2(***c***(*a*, *y*), *x*). Поклавши *y* = 0 і позначивши ***c***(*a*, 0) = *b*, одержимо *f*(*x*) = *K*2(*b*, *x*).

1. **Чи є функція ЧРФ?**
2. **Довести, що функція є ПРФ.**

=====================================================================================

25 Білет

1. **Універсальна функція Кліні.**

При вивченні властивостей ЧРФ іноді зручніше користуватися не універсальними функціями *T*(*x*0, *x*1, …, *xn*), а особливими функціями Кліні.

Введемо функції:

*K*2(*x*0, *x*1) = *T*2 (*l*(*x*0), *c*(*r*(*x*0), *x*1))

*K*3(*x*0, *x*1, *x*2) = *K*2 ([(*x*0, *x*1], *x*2)),

де [*x*0, *x*1] = *c*(*l*(*x*0), *c*(*r*(*x*0), *x*1)) – нумерація пар натуральних чисел

Лема. Функції *K*2(*x*0, *x*1) і *K*3(*x*0, *x*1, *x*2) зв’язані з універсальними функціями *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2) та *Т*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3) тотожностями:

1) *K*2(*c*(*x*0, *x*1), *x*2)= *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2).

2) *K*3(*c*(*x*0, *x*1), *x*2, *x*3) = *Т*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3).

Теорема 12.1. Функція Кліні *K*2(*x*0, *x*1) є ЧРФ, універсальною для всіх одномісних ЧРФ.

Доведення. Якщо *f*(*x*) – довільна ЧРФ, то для функції *g*(*y*, *x*) = *f*(*x*) + 0⋅*y* справедливе співвідношення *g*(*y*, *x*) = *T*3(*a*, *y*, *x*) = *K*2(***c***(*a*, *y*), *x*). Поклавши *y* = 0 і позначивши ***c***(*a*, 0) = *b*, одержимо *f*(*x*) = *K*2(*b*, *x*).

1. **Показати, що якщо функція f(x) є ЧРФ, то всяка функція, яка відрізняється від f(x) на скінченній множині значень агрументу, є ЧРФ.**
2. **Якщо множина А рекурсивна. То множина N\A – рекурсивна. Довести.**

=====================================================================================

26 Білет

1. **Універсальна функція Кліні.**

При вивченні властивостей ЧРФ іноді зручніше користуватися не універсальними функціями *T*(*x*0, *x*1, …, *xn*), а особливими функціями Кліні.

Введемо функції:

*K*2(*x*0, *x*1) = *T*2 (*l*(*x*0), *c*(*r*(*x*0), *x*1))

*K*3(*x*0, *x*1, *x*2) = *K*2 ([(*x*0, *x*1], *x*2)),

де [*x*0, *x*1] = *c*(*l*(*x*0), *c*(*r*(*x*0), *x*1)) – нумерація пар натуральних чисел

Лема. Функції *K*2(*x*0, *x*1) і *K*3(*x*0, *x*1, *x*2) зв’язані з універсальними функціями *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2) та *Т*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3) тотожностями:

1) *K*2(*c*(*x*0, *x*1), *x*2)= *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2).

2) *K*3(*c*(*x*0, *x*1), *x*2, *x*3) = *Т*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3).

Теорема 12.1. Функція Кліні *K*2(*x*0, *x*1) є ЧРФ, універсальною для всіх одномісних ЧРФ.

Доведення. Якщо *f*(*x*) – довільна ЧРФ, то для функції *g*(*y*, *x*) = *f*(*x*) + 0⋅*y* справедливе співвідношення *g*(*y*, *x*) = *T*3(*a*, *y*, *x*) = *K*2(***c***(*a*, *y*), *x*). Поклавши *y* = 0 і позначивши ***c***(*a*, 0) = *b*, одержимо *f*(*x*) = *K*2(*b*, *x*).

1. **Функція не є ЧРФ. Довести**
2. **Якщо множини А і В рекурсивні, то множина А(перетин)В – рекурсивна. Довести.**

=====================================================================================

28 Білет

1. **Універсальна функція Кліні.**

При вивченні властивостей ЧРФ іноді зручніше користуватися не універсальними функціями *T*(*x*0, *x*1, …, *xn*), а особливими функціями Кліні.

Введемо функції:

*K*2(*x*0, *x*1) = *T*2 (*l*(*x*0), *c*(*r*(*x*0), *x*1))

*K*3(*x*0, *x*1, *x*2) = *K*2 ([(*x*0, *x*1], *x*2)),

де [*x*0, *x*1] = *c*(*l*(*x*0), *c*(*r*(*x*0), *x*1)) – нумерація пар натуральних чисел

Лема. Функції *K*2(*x*0, *x*1) і *K*3(*x*0, *x*1, *x*2) зв’язані з універсальними функціями *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2) та *Т*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3) тотожностями:

1) *K*2(*c*(*x*0, *x*1), *x*2)= *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2).

2) *K*3(*c*(*x*0, *x*1), *x*2, *x*3) = *Т*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3).

Теорема 12.1. Функція Кліні *K*2(*x*0, *x*1) є ЧРФ, універсальною для всіх одномісних ЧРФ.

Доведення. Якщо *f*(*x*) – довільна ЧРФ, то для функції *g*(*y*, *x*) = *f*(*x*) + 0⋅*y* справедливе співвідношення *g*(*y*, *x*) = *T*3(*a*, *y*, *x*) = *K*2(***c***(*a*, *y*), *x*). Поклавши *y* = 0 і позначивши ***c***(*a*, 0) = *b*, одержимо *f*(*x*) = *K*2(*b*, *x*).

1. **Довести що прообраз РПМ відносно ЧРФ є РПМ.**
2. **Якщо m – універсальна множина m – зводиться до РПМ α, то α теж є m-універсальною множиною. Довести**

=====================================================================================